

Die Berechnung der Steilschrauben mit zentrischen Schlag-  
gelenken bei beliebig beschleunigter, räumlicher Flugbahn.

Übersicht: Als Unterlage für Stabilitätsunter-  
suchungen werden für einen Rotor mit un-  
verwundenem Rechteckblatt die Luft- und  
Massenkräfte berechnet und die Bewegungs-  
gleichungen der ungestörten und gestörten  
Schlagbewegung aufgestellt.

Gliederung: I. Bezeichnungen.  
II. Berechnung der Luftkräfte aus der  
Relativgeschwindigkeit am Blattele-  
ment.  
III. Berechnung des Momentes der Massen-  
kräfte.  
IV. Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

Der Bericht umfasst 18 Seiten.

Institut für instationäre Vorgänge  
der  
Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E.V.

Institutleiter

*Küssner*

(Küssner)

Bearbeiter

*Sissingh*

( Sissingh )

gesehen

*M. Betz*

( Betz )

# I. Bezeichnungen.

## a) Kennzeichnung des Flugzustandes

- XYZ - Rechtwinkliges, flugzeugfestes Koordinaten-System mit dem Ursprung in Rotormitte und den Einheitsvektoren  $i, j, k$ . Die XY-Ebene fällt in die Normalebene des Rotors. Richtung der positiven Achsen entsprechend DIN L 100:
- X positiv in Richtung der Flugzeuglängsachse nach vorn,
  - Y positiv nach rechts bei einem Blick in normaler Flugrichtung,
  - Z bei normaler Fluglage positiv nach unten.

Die Komponenten der Kräfte, Momente, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden positiv gerechnet, wenn ihr Vektor ( Rechtsdrehung in Pfeilrichtung ) in die Richtung der positiven Achsen zeigt,

- V m/s momentane Bahngeschwindigkeit des Rotormittelpunktes,
- $\omega_{x,y,z}$  s<sup>-1</sup> Winkelgeschwindigkeiten des Flugzeuges um Rotormitte,
- $\mu_{x,y,z}$  - Fortschrittsgrade des Rotors  
z.B.  $\mu_x = \frac{V_x}{U}$
- $n_{x,y,z}$  - Beiwerte für das Verhältnis der Translationsbeschleunigungen  $\dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z$  zur Erdbeschleunigung  
z.B.  $n_x = \frac{\dot{V}_x}{g}$
- $k_{x,y,z}$  - Beiwerte für die Drehgeschwindigkeiten des Flugzeuges  
z.B.  $k_x = \frac{\omega_x}{\Omega}$
- $\dot{k}_{x,y,z}$  - Beiwerte für die Drehbeschleunigungen des Flugzeuges  
z.B.  $\dot{k}_x = \frac{\dot{\omega}_x}{\Omega^2}$

### b) Rotordaten

R	m	Halbmesser des Rotors,
$\Omega$	$s^{-1}$	konstante Winkelgeschwindigkeit des Rotors gegenüber dem Flugzeug, $\Omega$ ist positiv wenn der Vektorpfeil in die Richtung der positiven Z-Achse zeigt,
U	m/s	Umfangsgeschwindigkeit der Blattspitze infolge der Eigendrehung des Rotors
$U = R \cdot \Omega$		
z	-	Anzahl der Blätter,
t	m	Blatttiefe

### c) Strömung am Blattelement

$\psi$	-	Azimutwinkel des Blattes, Nullage in Richtung der negativen X-Achse,
$\xi$	-	dimensionsloser Abstand eines Blattelementes von der Drehachse
$\xi = r/R$		
v	m/s	absolute Geschwindigkeit eines Blattelementes mit den Komponenten
$v_t \text{ parallel zur Normalebene,}$		
$v_n \text{ senkrecht zur Normalebene.}$		
$\lambda_d$	-	Durchflussgrad
$\lambda_d \cdot U = V_z - w$		
w	m/s	Störgeschwindigkeit am Ort der Schraube
$c_a$	-	Auftriebsbeiwert der Strömung am Blattelement
$c_a = c'_a \cdot \left( \arctg \frac{\xi_n}{\xi_t} + \gamma \right)$		
$c'_a$	-	Auftriebsgradient,
$\xi_n, \xi_t$	-	Beiwerte für die Relativgeschwindigkeit am Blattelement,

- $\alpha$  - aerodynamische Anstellung des Blattes, Winkel zwischen der Nullauftriebslinie und der Normalebene,
- $\beta$  - Schlagwinkel, momentaner Winkel zwischen der Blattlängsachse und der Normalebene
- $$\beta = (a_0 + \Delta a_0) - (a_1 + \Delta a_1) \cos \psi - (b_1 + \Delta b_1) \sin \psi$$
- $a_0, a_1, b_1$  - Koeffizienten der quasistationären Schlagbewegung des momentanen Flugzustandes,
- $\Delta a_0, \Delta a_1, \Delta b_1$  - Störungsglieder der Schlagbewegung.

#### d) Blattdaten

- $M_G$  mkg Moment des Blattgewichtes in bezug auf das Schlaggelenk,
- $K$  - Beiwert für das Gewichtsmoment
- $$K = \frac{M_G}{R^2 U^2 t c'_a \zeta/2}$$
- $\Theta_{A,B,C}$  mkgs<sup>2</sup> Massenträgheitsmomente eines Blattes in bezug auf seine durch die Rotormitte gehenden Hauptachsen ABC
- $\gamma$  - Blattmassenkonstante

$$\gamma = \frac{R^4 \zeta t c'_a}{\Theta_B}$$

## II. Berechnung der Luftkräfte aus der Relativgeschwindigkeit am Blattelement.

Bei beliebiger Flugbahn und Schlaggeschwindigkeit kann die absolute Bewegung des Blattes nach dem Miozzischen Satz so aufgespalten werden, dass die momentane Drehachse immer durch den gleichen Punkt des Blattes hindurchgeht. Wir wählen als ausgezeichneten Körperpunkt zweckmässig die Rotormitte und zerlegen die Bewegung des Blattes in eine Translation mit der Geschwindigkeit  $V$  des Rotormittelpunktes

$$\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_z \cdot \vec{k} \quad \dots\dots(1)$$

und eine Rotation um diesen Punkt mit der nach Grösse und Richtung veränderlichen Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \omega_x \cdot \vec{i} + \omega_y \cdot \vec{j} + (\omega_z + \Omega) \cdot \vec{k} \quad \dots\dots(2)$$

Die Schlagbewegung, die wir als Relativbewegung auffassen wollen, ist dabei zunächst noch nicht berücksichtigt. In Gl(2) ist

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + (\omega_z + \Omega)^2} \quad \dots\dots\dots(3)$$

der absolute Betrag der resultierenden Winkelgeschwindigkeit und  $\vec{k}$  der entsprechende Einheitsvektor. Es sei im Inertialsystem, s.Bild 1 <sup>1)</sup>

$\vec{r}_M$  der Ortsvektor des Rotormittelpunktes,

$\vec{r}$  der Ortsvektor eines beliebigen Blattelementes,

$\vec{r}$  der Differenzvektor  $\vec{r} - \vec{r}_M$

---

<sup>1)</sup> Eine sehr anschauliche vektorielle Darstellung der Punkt- und Körpermechanik findet der Leser in dem von F.Tölke bearbeiteten Abschnitt "Mechanik starrer Körper" des Taschenbuches für Bauingenieure, dessen Bezeichnungen übernommen wurden.

Aus dem Ortsvektor

$$\vec{r} = \vec{r}_M + \vec{r}' \quad \dots\dots(4)$$

eines beliebigen Blattelementes erhalten wir durch einfache Differentiation die absolute Geschwindigkeit  $v$  dieses Elementes. Es ist

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} + \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{\text{abs}} \quad \dots\dots(5)$$

und nach der Vektoranalysis

$$\left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{\text{abs}} = \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{\text{rel}} + [\omega \vec{r}' \times \vec{r}'] \quad \dots\dots(6)$$

Damit wird

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_M}{dt} + \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{\text{rel}} + [\omega \vec{r}' \times \vec{r}'] \quad \dots\dots(7)$$

In dieser Gleichung ist

$\frac{d\vec{r}_M}{dt}$	die Translationsgeschwindigkeit des Rotormittelpunktes nach Gl(1),
$\left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{\text{rel}}$	die Relativgeschwindigkeit infolge der Schlagbewegung,
$[\omega \vec{r}' \times \vec{r}']$	die Geschwindigkeit infolge der resultierenden Drehung nach Gl(2) .

Aus 
$$\vec{r}' = - (r \cos \beta \cos \psi) \cdot \vec{i} - (r \cos \beta \sin \psi) \cdot \vec{j} - (r \sin \beta) \cdot \vec{k} \quad \dots\dots(8)$$

folgt

$$\left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{\text{rel}} = + (r \cos \psi \sin \beta \cdot \dot{\beta}) \cdot \vec{i} + (r \sin \psi \sin \beta \cdot \dot{\beta}) \cdot \vec{j} - (r \cos \beta \cdot \dot{\psi}) \cdot \vec{k} \quad \dots\dots(9)$$

Wenn man die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_z$  des Flugzeuges um die Hochachse gegenüber der Eigendrehung  $\Omega$  des Rotors vernachlässigt, erhält man nach Gl(7) für die absolute Geschwindigkeit eines Blattelementes den Ausdruck <sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} \vec{v} = & \dot{i} \cdot (V_x + \Omega r \cos \beta \sin \psi - \omega_y r \sin \beta + r \dot{\beta} \cos \psi \sin \beta) \\ & + \dot{j} \cdot (V_y - \Omega r \cos \beta \cos \psi + \omega_x r \sin \beta + r \dot{\beta} \sin \psi \sin \beta) \\ & + \dot{k} \cdot (V_z - \omega_x r \cos \beta \sin \psi + \omega_y r \cos \beta \cos \psi - r \dot{\beta} \cos \beta) \dots (10) \end{aligned}$$

Mit den dimensionslosen Beiwerten

$$\xi = r/R \dots (11)$$

$$k_{x,y} = \frac{\omega_{x,y}}{\Omega} \dots (12)$$

$$\mu_{x,y,z} = \frac{V_{x,y,z}}{U} \dots (13)$$

geht Gl(10) über in

$$\vec{v} = v_x \cdot \dot{i} + v_y \cdot \dot{j} + v_z \cdot \dot{k} \dots (14)$$

mit

$$v_x = U(\mu_x + \xi \cos \beta \sin \psi - k_y \xi \sin \beta + \xi \frac{\dot{\beta}}{\Omega} \cos \psi \sin \beta) \dots (15)$$

$$v_y = U(\mu_y - \xi \cos \beta \cos \psi + k_x \xi \sin \beta + \xi \frac{\dot{\beta}}{\Omega} \sin \psi \sin \beta) \dots (16)$$

$$v_z = U(\mu_z - k_x \xi \cos \beta \sin \psi + k_y \xi \cos \beta \cos \psi - \xi \frac{\dot{\beta}}{\Omega} \cos \beta) \dots (17)$$

Für die Berechnung der Luftkräfte am Blattelement müssen wir von dem flugzeugfesten XYZ-System auf ein blattfestes System übergehen. Mit Rücksicht auf die später zu be-

---

2) Punkte bedeuten allgemein Ableitungen nach der Zeit.

handelnden Massenkräfte wählen wir zweckmässig das in Bild 2 dargestellte ABC-System. ABC seien Hauptachsen, B fällt mit der Achse des Schlaggelenkes zusammen und liegt somit in der Normalebene des Rotors. Es ist

$$v_B = + v_x \cdot \sin \psi - v_y \cdot \cos \psi \quad \dots(18)$$

$$v_C = + v_z \cdot \cos \beta - \sin \beta (v_x \cdot \cos \psi + v_y \cdot \sin \psi) \quad \dots(19)$$

Die Geschwindigkeitskomponente  $v_A$  in Richtung der Blattlängsachse interessiert in diesem Zusammenhang nicht, da sie bei der Berechnung der Luftkräfte vernachlässigt wird. Mit Gl(15+17) gehen Gl(18,19) über in

$$v_B = U \left\{ \xi \cos \beta - \sin \psi ( \xi k_y \sin \beta - \mu_x ) - \cos \psi ( \xi k_x \sin \beta + \mu_y ) \right\} \quad \dots(20)$$

$$v_C = V_z \cdot \cos \beta - U \left\{ \xi \frac{\dot{\beta}}{\Omega} + \sin \psi ( \mu_y \sin \beta + \xi k_x ) + \cos \psi ( \mu_x \sin \beta - \xi k_y ) \right\} \quad \dots(21)$$

Die Anströmung des Blattelementes setzt sich zusammen aus der negativen Eigengeschwindigkeit und dem Abwind  $w$ , von dem wir annehmen wollen, dass er gleichmässig über die Rotorkreisfläche verteilt ist. Mit den Bezeichnungen nach Bild 3 ist <sup>3)</sup>

$$U \cdot \xi_t = v_B \quad \dots(22)$$

$$U \cdot \xi_n = v_C - w \cdot \cos \beta \quad \dots(23)$$

Setzt man 
$$V_z - w = \lambda_d \cdot U \quad \dots(24)$$

---

<sup>3)</sup> Der Index  $t$  bzw.  $n$  in Gl(22,23) wurde in Übereinstimmung mit den in den gleichen Richtungen verlaufenden Tangential- und Normalkräften gewählt.



so erhält man mit den für kleine Schlagwinkel zulässigen Vernachlässigungen

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \beta \\ \cos \beta &= 1\end{aligned}$$

aus Gl( 20 - 24 ) folgende Beziehungen für die Beiwerte der Relativgeschwindigkeit am Blattelement :

$$\begin{aligned}\xi_t &= \left\{ \begin{array}{l} - \sin \psi ( \xi \beta k_y - \mu_x ) \\ - \cos \psi ( \xi \beta k_x + \mu_y ) \end{array} \right. \quad \dots\dots(25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_n &= \lambda_d - \xi \frac{\dot{\beta}}{n} - \sin \psi ( \beta \mu_y + \xi k_x ) \\ &\quad - \cos \psi ( \beta \mu_x - \xi k_y ) \quad \dots\dots(26)\end{aligned}$$

Da die Ausdrücke  $\xi \beta k_y$  bzw.  $\xi \beta k_x \ll \xi$  sind, können wir statt Gl(25) schreiben<sup>4)</sup>

$$\xi_t = \xi + \mu_x \sin \psi - \mu_y \cos \psi \quad \dots\dots(25a)$$

Das Moment der Luftkräfte in bezug auf das Schlaggelenk beträgt bei einem unverwundenen Rechteckblatt mit der Blattiefe t

$$M_L = R^2 U^2 t c'_a \int_0^B \xi_t^2 \cdot \left\{ \left( \frac{\xi_n}{\xi_t} + \gamma \right) d\xi \right. \quad \dots\dots(27)$$

Für die Auswertung dieses Integrales werden die Ausdrücke  $\xi_t^2$  und  $\xi_n \cdot \xi_t$  benötigt. Mit Gl(25a,26) ist

$$\begin{aligned}\xi_t^2 &= \xi^2 + \frac{1}{2}(\mu_x^2 + \mu_y^2) + \sin \psi \cdot 2\xi \mu_x - \cos \psi \cdot 2\xi \mu_y \\ &\quad - \sin 2\psi \cdot \mu_x \mu_y + \cos 2\psi \cdot \frac{1}{2}(\mu_y^2 - \mu_x^2) \quad \dots\dots(28)\end{aligned}$$

---

4) Bei einem Schlagwinkel von  $\beta = 11^\circ$  und  $k_{x,y} = 0,1$  beträgt der Fehler etwa 2 %.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_t \cdot \mathcal{E}_n = & \xi \lambda_d - \xi^2 \frac{\dot{\beta}}{\Omega} - \frac{1}{2} \xi (k_x \mu_x + k_y \mu_y) \\
 & + \sin \psi \cdot \left\{ -\beta \xi \mu_y - \frac{\dot{\beta}}{\Omega} \xi \mu_x - \xi^2 k_x + \mu_x \lambda_d \right\} \\
 & + \cos \psi \cdot \left\{ -\beta \xi \mu_x + \frac{\dot{\beta}}{\Omega} \xi \mu_y + \xi^2 k_y - \mu_y \lambda_d \right\} \\
 & + \sin 2\psi \cdot \left\{ \frac{1}{2} \beta (\mu_y^2 - \mu_x^2) + \frac{1}{2} \xi (k_x \mu_y + k_y \mu_x) \right\} \\
 & + \cos 2\psi \cdot \left\{ \beta \mu_x \mu_y + \frac{1}{2} \xi (k_x \mu_x - k_y \mu_y) \right\} \quad \dots (29)
 \end{aligned}$$

Mit

$$\beta = a_0 + \Delta a_0 - (a_1 + \Delta a_1) \cos \psi - (b_1 + \Delta b_1) \sin \psi \quad \dots (30)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta} = \Delta \dot{a}_0 & + \sin \psi \left\{ \Omega (a_1 + \Delta a_1) - \Delta \dot{b}_1 \right\} \\
 & + \cos \psi \left\{ -\Omega (b_1 + \Delta b_1) - \Delta \dot{a}_1 \right\} \quad \dots (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\beta} = \Delta \ddot{a}_0 & + \sin \psi \left\{ \Omega^2 (b_1 + \Delta b_1) + 2 \Delta \dot{a}_1 \Omega - \Delta \ddot{b}_1 \right\} \\
 & + \cos \psi \left\{ \Omega^2 (a_1 + \Delta a_1) - 2 \Delta \dot{b}_1 \Omega - \Delta \ddot{a}_1 \right\} \quad \dots (32)
 \end{aligned}$$

geht Gl(29) über in

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_t \cdot \mathcal{E}_n = & \xi \lambda_d - \frac{1}{2} \xi (k_x \mu_x + k_y \mu_y) - \frac{\Delta \dot{a}_0}{\Omega} \xi^2 - \frac{\Delta \dot{a}_1}{\Omega} \cdot \frac{1}{2} \xi \mu_y + \frac{\Delta \dot{b}_1}{\Omega} \cdot \frac{1}{2} \xi \mu_x \\
 & + \sin \psi \left\{ \mu_x \lambda_d - \xi^2 k_x - (a_0 + \Delta a_0) \xi \mu_y - \frac{\Delta \dot{a}_0}{\Omega} \xi \mu_x \right. \\
 & \quad \left. - (a_1 + \Delta a_1) \left( \xi^2 + \frac{1}{4} \mu_y^2 - \frac{1}{4} \mu_x^2 \right) + (b_1 + \Delta b_1) \cdot \frac{1}{2} \mu_x \mu_y + \frac{\Delta \dot{b}_1}{\Omega} \xi^2 \right\} \\
 & + \cos \psi \left\{ -\mu_y \lambda_d + \xi^2 k_y - (a_0 + \Delta a_0) \xi \mu_x + \frac{\Delta \dot{a}_0}{\Omega} \xi \mu_y \right. \\
 & \quad \left. + (b_1 + \Delta b_1) \left( \xi^2 + \frac{1}{4} \mu_x^2 - \frac{1}{4} \mu_y^2 \right) - (a_1 + \Delta a_1) \cdot \frac{1}{2} \mu_x \mu_y + \frac{\Delta \dot{a}_1}{\Omega} \xi^2 \right\} \\
 & + \dots \quad \dots (33)
 \end{aligned}$$

Wir erhalten damit nach Gl(27) folgenden Ausdruck für das Moment der Luftkräfte in bezug auf das Schlaggelenk:

$$\begin{aligned}
 \frac{M_L}{R^2 U^2 t \ c'_a \ S/2} = & \vartheta \left( \frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{4} B^2 u_x^2 + \frac{1}{4} B^2 u_y^2 \right) + \frac{1}{3} B^3 l_d \\
 & - \frac{1}{6} B^3 (k_x u_x + k_y u_y) - \frac{\dot{\Delta a}_0}{\Omega} \cdot \frac{1}{4} B^4 \\
 & - \frac{\dot{\Delta a}_1}{\Omega} \cdot \frac{1}{6} B^3 u_y + \frac{\dot{\Delta b}_1}{\Omega} \cdot \frac{1}{6} B^3 u_x \\
 & + \sin \psi \cdot \left\{ \vartheta \cdot \frac{2}{3} B^3 u_x + \frac{1}{2} B^2 u_x l_d - \frac{1}{4} B^4 k_x \right. \\
 & \quad - (a_0 + \Delta a_0) \cdot \frac{1}{3} B^3 u_y - \frac{\dot{\Delta a}_0}{\Omega} \cdot \frac{1}{3} B^3 u_x \\
 & \quad - (a_1 + \Delta a_1) \cdot \left( \frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{8} B^2 u_y^2 - \frac{1}{8} B^2 u_x^2 \right) \\
 & \quad \left. + (b_1 + \Delta b_1) \cdot \frac{1}{4} B^2 u_x u_y + \frac{\dot{\Delta b}_1}{\Omega} \cdot \frac{1}{4} B^4 \right\} \\
 & + \cos \psi \cdot \left\{ -\vartheta \cdot \frac{2}{3} B^3 u_y - \frac{1}{2} B^2 u_y l_d + \frac{1}{4} B^4 k_y \right. \\
 & \quad - (a_0 + \Delta a_0) \cdot \frac{1}{3} B^3 u_x + \frac{\dot{\Delta a}_0}{\Omega} \cdot \frac{1}{3} B^3 u_y \\
 & \quad + (b_1 + \Delta b_1) \cdot \left( \frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{8} B^2 u_x^2 - \frac{1}{8} B^2 u_y^2 \right) \\
 & \quad \left. - (a_1 + \Delta a_1) \cdot \frac{1}{4} B^2 u_x u_y + \frac{\dot{\Delta a}_1}{\Omega} \cdot \frac{1}{4} B^4 \right\} \\
 & + \dots
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

### III. Berechnung des Momentes der Massenkkräfte.

An Massenkkräften treten auf

- a) das Eigengewicht des Blattes,
- b) die Trägheitskräfte der Translationsbeschleunigungen,
- c) die Trägheitskräfte der Drehbeschleunigungen.

Bezeichnet man das Gewichtsmoment eines Blattes mit  $M_G$ , so beträgt bei den Translationsbeschleunigungen

$$\dot{v}_x = n_x \cdot g \quad \dots\dots(35)$$

$$\dot{v}_y = n_y \cdot g \quad \dots\dots(36)$$

$$\dot{v}_z = n_z \cdot g \quad \dots\dots(37)$$

das Moment der oben unter a und b aufgeführten Kräfte in bezug auf das Schlaggelenk bei normaler Fluglage

$$M_{M1} = M_G \left\{ n_z - 1 - \beta ( n_x \cdot \cos \psi + n_y \cdot \sin \psi ) \right\} \dots\dots(38)$$

Mit  $\beta$  nach Gl(30) und

$$K = \frac{M_G}{R^2 U^2 + c'_a \varphi/2} \quad \dots\dots(39)$$

geht Gl(38) über in

$$\begin{aligned} \frac{M_{M1}}{R^2 U^2 + c'_a \varphi/2} = K \left\{ \begin{aligned} &n_z - 1 + \frac{1}{2} n_x (a_1 + 4 a_1) + \frac{1}{2} n_y (b_1 + 4 b_1) \\ &- \cos \psi \cdot n_x (a_0 + 4 a_0) \\ &- \sin \psi \cdot n_y (a_0 + 4 a_0) \\ &- \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40) \end{aligned}$$

Das Moment der infolge der Drehbeschleunigungen auftretenden Trägheitskräfte wird bei einem zentrischen Schlaggelenk am einfachsten mit den Eulerschen Kreiselgleichungen berechnet. Wir haben zu diesem Zwecke die Geschwindigkeitsvektoren der verschiedenen Drehbewegungen :

- 1) Drehung des Flugzeuges um die X-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_x$ ,
- 2) Drehung des Flugzeuges um die Y-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_y$ ,
- 3) Eigendrehung des Rotors mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$
- 4) Schlagbewegung des Blattes mit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\beta}$

auf das bereits früher erwähnte blattfeste ABC-System umzurechnen. Bezeichnet man die Winkelgeschwindigkeiten um die Hauptachsen mit  $\omega_{A,B,C}$  und die entsprechenden Hauptträgheitsmomente des Blattes mit  $\Theta_{A,B,C}$ , so können wir schreiben:

$$\omega_A = -\Omega \sin \beta - \omega_x \cos \psi \cos \beta - \omega_y \cos \beta \sin \psi \quad \dots(41)$$

$$\omega_B = \dot{\beta} + \omega_x \sin \psi - \omega_y \cos \psi \quad \dots(42)$$

$$\omega_C = +\Omega \cos \beta - \omega_x \cos \psi \sin \beta - \omega_y \sin \psi \sin \beta \quad \dots(43)$$

Nach Euler ist das Moment um das Schlaggelenk (B-Achse)

$$M_{M2} = (\Theta_C - \Theta_A) \omega_A \omega_C - \Theta_B \cdot \dot{\omega}_B \quad \dots(44)$$

Wenn wir das Blatt als einen verlängerten, symmetrischen Kreisel auffassen, dessen Trägheitsmoment um die Figurenachse A gegenüber den beiden anderen Hauptträgheitsmomenten vernachlässigt werden kann, so ist mit  $\Theta_B = \Theta_C = \Theta$

$$M_{M2} = \Theta (\omega_A \cdot \omega_C - \dot{\omega}_B) \quad \dots(45)$$

Aus Gl(41-43) folgt mit  $\sin \beta = \beta$  und  $\cos \beta = 1$

$$\begin{aligned} \omega_A \cdot \omega_C = & \beta \left( \frac{1}{2} \omega_x^2 + \frac{1}{2} \omega_y^2 - \Omega^2 \right) \\ & + \sin \psi \cdot \Omega \omega_y (\beta^2 - 1) \\ & + \cos \psi \cdot \Omega \omega_x (\beta^2 - 1) \\ & + \sin 2\psi \cdot \beta \omega_x \omega_y \\ & + \cos 2\psi \cdot \frac{1}{2} \beta (\omega_x^2 - \omega_y^2) \end{aligned} \quad \dots(46)$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_B = \ddot{\beta} + \sin \psi \cdot (\dot{\omega}_x + \Omega \cdot \omega_y) \\ + \cos \psi \cdot (-\dot{\omega}_y + \Omega \cdot \omega_x) \quad \dots (47)\end{aligned}$$

Mit diesen Werten erhalten wir nach Gl(45) folgende Beziehung

$$\begin{aligned}M_{M2} = \Theta \left[ \beta \left( \frac{1}{2} \omega_x^2 + \frac{1}{2} \omega_y^2 - \Omega^2 \right) - \ddot{\beta} \right. \\ + \sin \psi \cdot \left\{ \Omega \omega_y (\beta^2 - 2) - \dot{\omega}_x \right\} \\ + \cos \psi \cdot \left\{ \Omega \omega_x (\beta^2 - 2) + \dot{\omega}_y \right\} \\ + \sin 2\psi \cdot \beta \omega_x \omega_y \\ \left. + \cos 2\psi \cdot \frac{1}{2} \beta (\omega_x^2 - \omega_y^2) \right] \quad \dots (48)\end{aligned}$$

Da  $\frac{1}{2} (\omega_x^2 + \omega_y^2) \ll \Omega^2$  und  $\beta^2 \ll 2$  können wir diese Glieder in Gl(48) vernachlässigen und wir erhalten mit  $\beta$  und  $\ddot{\beta}$  nach Gl(30 bzw. 32) sowie

$$\dot{k}_{x,y} = \frac{\dot{\omega}_{x,y}}{\Omega^2} \quad \dots (49)$$

schliesslich folgenden Ausdruck für das Moment der Trägheitskräfte aus den Drehbeschleunigungen:

$$\begin{aligned}M_{M2} = - \Theta \Omega^2 \left[ \begin{aligned} & a_0 + 4a_0 + \frac{4\ddot{a}_0}{\Omega^2} \\ & + \sin \psi \cdot \left\{ \frac{24\dot{a}_1}{\Omega} - \frac{4\ddot{b}_1}{\Omega^2} + 2\dot{k}_y + \dot{k}_x + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}(a_1 + 4a_1) k_x k_y + \frac{1}{4}(b_1 + 4b_1)(3k_y^2 + k_x^2) \right\} \\ & + \cos \psi \cdot \left\{ -2\frac{4\dot{b}_1}{\Omega} - \frac{4\ddot{a}_1}{\Omega^2} + 2\dot{k}_x - \dot{k}_y + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}(b_1 + 4b_1) k_x k_y + \frac{1}{4}(a_1 + 4a_1)(3k_x^2 + k_y^2) \right\} \\ & + \dots \end{aligned} \right] \quad \dots (50)\end{aligned}$$

#### IV. Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

Aus der Gleichgewichtsbedingung

$$M_L + M_{M1} + M_{M2} = 0 \quad \dots(51)$$

erhalten wir mit

$$\gamma = \frac{R^4 \epsilon \epsilon' a}{\theta} \quad \dots(52)$$

durch Koeffizientenvergleich aus Gl.(34, 40, 50) folgende Bewegungsgleichungen für die Schlagbewegung:

$$a_o + \Delta a_o + \frac{\Delta \ddot{a}_o}{\Omega^2} = \frac{\gamma}{2} \left[ \mathcal{N} \left( \frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{4} B^2 \mu_x^2 + \frac{1}{4} B^2 \mu_y^2 \right) + \frac{1}{3} B^3 \lambda_d - \frac{1}{6} B^3 (k_x \mu_x + k_y \mu_y) - \frac{\Delta \dot{a}_o}{\Omega} \cdot \frac{1}{4} B^4 - \right. \\ \left. - \frac{\Delta \dot{a}_1}{\Omega} \frac{1}{6} B^3 \mu_y + \frac{\Delta \dot{b}_1}{\Omega} \frac{1}{6} B^3 \mu_x + K \left\{ n_z - 1 + \frac{1}{2} n_x (a_1 + \Delta a_1) + \frac{1}{2} n_y (b_1 + \Delta b_1) \right\} \right] \quad \dots(53)$$

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\Delta \dot{a}_1}{\Omega} - \frac{\Delta \ddot{b}_1}{\Omega^2} + 2k_y + \dot{k}_x + \frac{1}{2} (a_1 + \Delta a_1) k_x k_y + \frac{1}{4} (b_1 + \Delta b_1) (3k_y^2 + k_x^2) \\ & = \frac{\gamma}{2} \left[ \mathcal{N} \left( \frac{2}{3} B^3 \mu_x + \frac{1}{2} B^2 \mu_x \lambda_d + \frac{1}{4} B^4 k_x - (a_o + \Delta a_o) \frac{1}{3} B^3 \mu_y - \frac{\Delta \dot{a}_o}{\Omega} \frac{1}{3} B^3 \mu_x - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (a_1 + \Delta a_1) \left( \frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{8} B^2 \mu_y^2 - \frac{1}{8} B^2 \mu_x^2 \right) + (b_1 + \Delta b_1) \frac{1}{4} B^2 \mu_x \mu_y + \frac{\Delta \dot{b}_1}{\Omega} \frac{1}{4} B^4 - K n_y (a_o + \Delta a_o) \right] \right] \quad \dots(54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2 \frac{\Delta \dot{b}_1}{\Omega} - \frac{\Delta \ddot{a}_1}{\Omega^2} + 2k_x - \dot{k}_y + \frac{1}{2} (b_1 + \Delta b_1) k_x k_y + \frac{1}{4} (a_1 + \Delta a_1) (3k_x^2 + k_y^2) \\ & = \frac{\gamma}{2} \left[ -\mathcal{N} \left( \frac{2}{3} B^3 \mu_y - \frac{1}{2} B^2 \mu_y \lambda_d + \frac{1}{4} B^4 k_y - (a_o + \Delta a_o) \frac{1}{3} B^3 \mu_x + \frac{\Delta \dot{a}_o}{\Omega} \frac{1}{3} B^3 \mu_y + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (b_1 + \Delta b_1) \left( \frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{8} B^2 \mu_x^2 - \frac{1}{8} B^2 \mu_y^2 \right) - (a_1 + \Delta a_1) \frac{1}{4} B^2 \mu_x \mu_y + \frac{\Delta \dot{a}_1}{\Omega} \frac{1}{4} B^4 - K n_x (a_o + \Delta a_o) \right] \right] \quad \dots(55) \end{aligned}$$

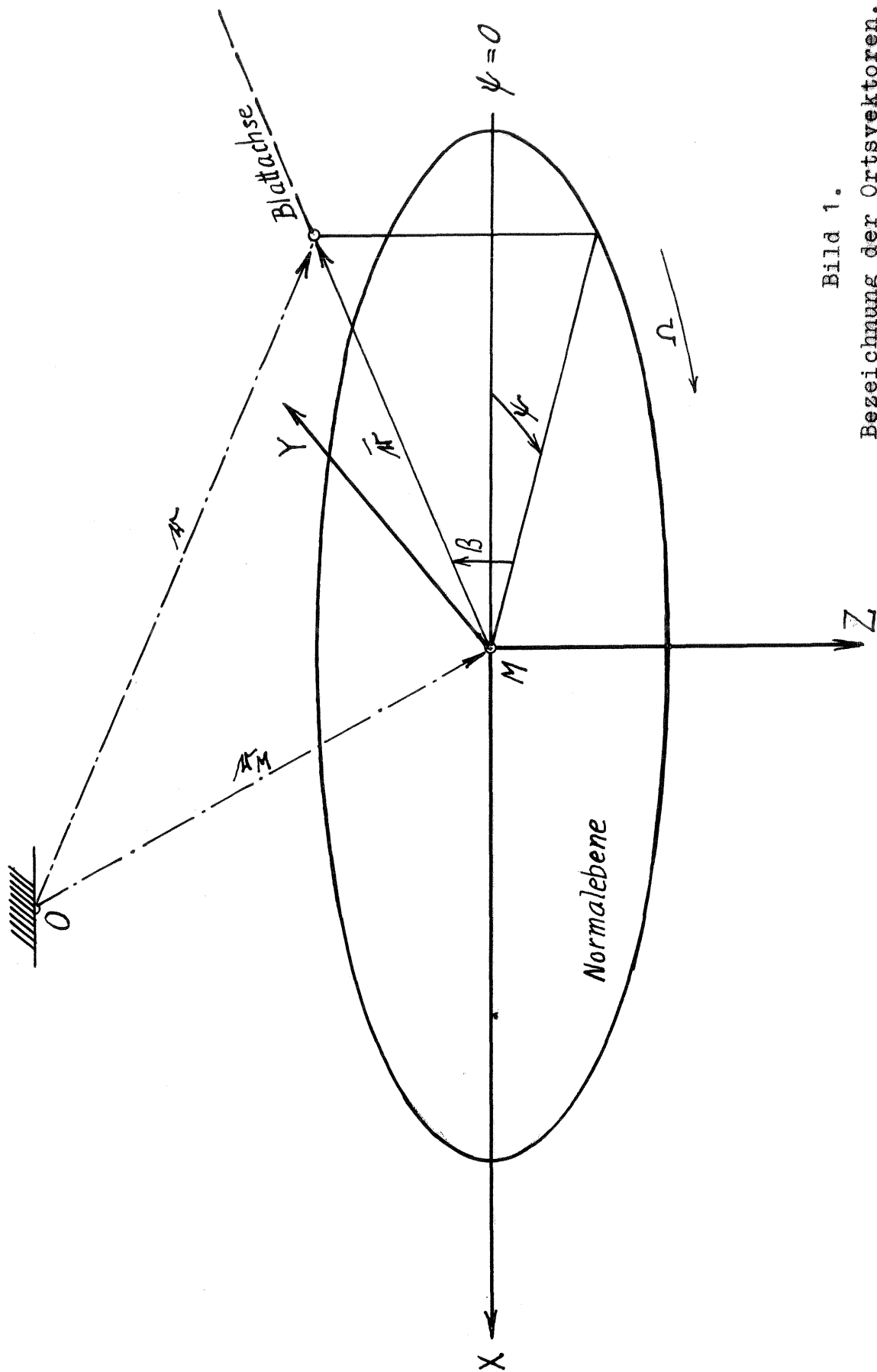


Bild 1.  
Bezeichnung der Ortsvektoren.



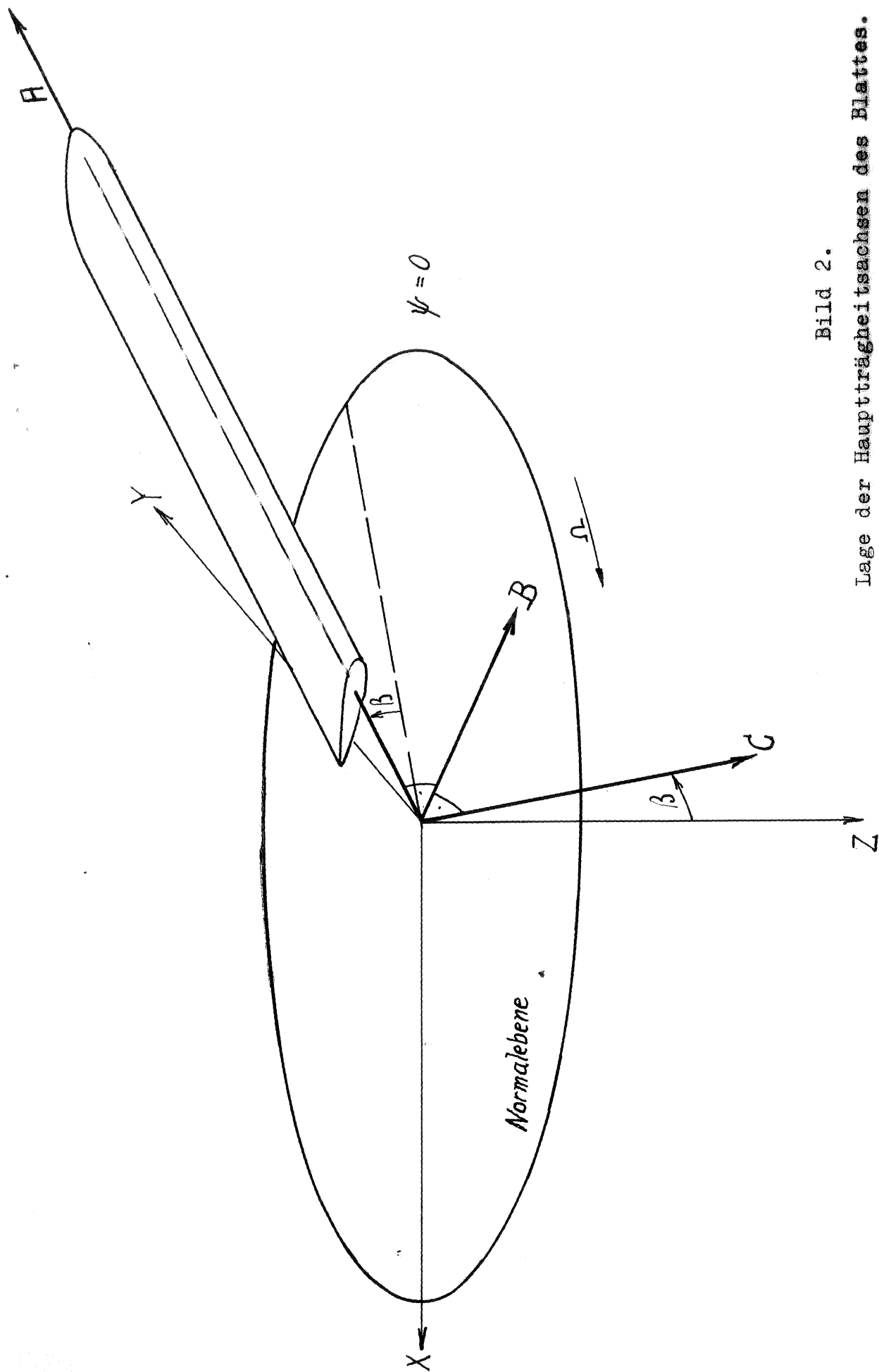


Bild 2.

Lage der Hauptträgheitsachsen des Blattes.

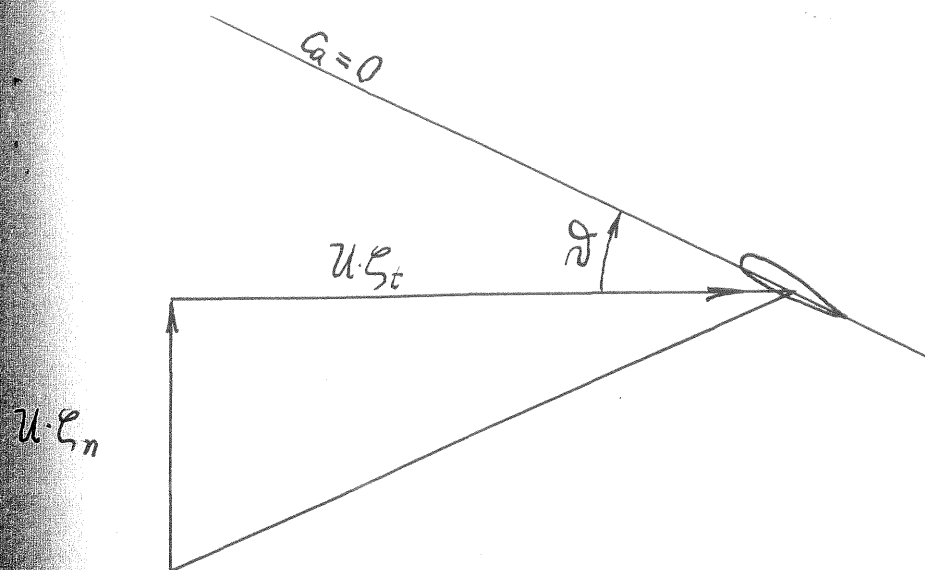


Bild 3. Strömung am Blattelement.